



**You have downloaded a document from
RE-BUS
repository of the University of Silesia in Katowice**

Title: Mity i fakty o rozwijaniu myślenia matematycznego dziecka

Author: Renata Raszka

Citation style: Raszka Renata. (2014). Mity i fakty o rozwijaniu myślenia matematycznego dziecka W: U. Szuścik, B. Oelszlaeger-Kosturek (red.), “Dziecko w świecie innowacyjnej edukacji, współdziałania i wartości. T. 2.” (s. 77-92). Katowice : Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego.



Uznanie autorstwa - Użycie niekomercyjne - Bez utworów zależnych Polska - Licencja ta zezwala na rozpowszechnianie, przedstawianie i wykonywanie utworu jedynie w celach niekomercyjnych oraz pod warunkiem zachowania go w oryginalnej postaci (nie tworzenia utworów zależnych).



UNIwersytet ŚLĄSKI
W KATOWICACH



Biblioteka
Uniwersytetu Śląskiego



Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego

Renata Raszka

Mity i fakty o rozwijaniu myślenia matematycznego dziecka

To co musiałeś odkryć samodzielnie zostawia w twym umyśle ścieżkę,
którą w razie potrzeby możesz pójść jeszcze raz.

Georg Lichtenberg

Wprowadzenie

„Matematyka jest bardzo ważnym elementem kultury, dlatego młode pokolenie musi ją przyswajać, skonstruować »od nowa«. Zmusza go do tego m.in. konieczność coraz szerszych zastosowań matematyki”¹. Matematyka jako przedmiot powszechnego nauczania nie powinna być traktowana jako wiedza gotowa, stworzona przez matematyków, a ty uczniu tylko się tego naucz. Jest bowiem domeną społeczną, tworzoną i przekazywaną w różnych aspektach. Jest ona wspólnym dobrem, wspólnie tworzoną i wzajemnie przekazywaną. Uczeń może i powinien tu również wiele wymyślić, zaproponować, odkryć².

Program Międzynarodowej Oceny Umiejętności Uczniów (*The Programme for International Student Assessment*, w skrócie PISA), koordynowany przez OECD (Organizację Współpracy Gospodarczej i Rozwoju), to jedno z największych badań edukacyjnych na świecie. Wyniki badań PISA uznawane są za najważniejsze wskaźniki rozwoju edukacji na świecie. Matematyka jest jedną z dziedzin występujących w każdym badaniu PISA. Badanie to próbuje zmierzyć przygotowanie 15-latków do wykorzystania umiejętności matematycznych w otaczającym ich świecie. Zadania są najczęściej umieszczone w kontekście praktycznym i choć do ich rozwiązania nie jest potrzebna zaawansowana wiedza matematyczna, w większości przypadków nie przypominają rutynowych zadań szkolnych. Trudność polega zatem – podobnie jak dzieje

¹ J. Filip, T. Rams: *Dziecko w świecie matematyki*. Kraków, Oficyna Wydawnicza „Impuls”, 2000, s. 20.

² Tamże, s. 26.

się to w dorosłym życiu – na poradzeniu sobie z problemem, dla którego nie mamy gotowego schematu postępowania³.

Polska uczestniczy w tym badaniu od pierwszej edycji, która odbyła się w roku 2000. W każdym badaniu, przeprowadzanym w cyklach trzyletnich, wskazana jest wiodąca dziedzina. W 2000 roku było to czytanie, w 2003 – matematyka, w 2006 – nauki przyrodnicze, w 2009 – czytanie. W matematyce polscy uczniowie polepszyli swój rezultat z 470 punktów w 2000 roku do 490 punktów w 2003 i do 495 w 2006. W roku 2006 Polska dołączyła do grupy krajów o wyniku z matematyki statystycznie takim samym jak średni wynik krajów OECD. Średni wynik polskich uczniów w roku 2009 w stosunku do roku 2006 nie zmienił się i nadal wynosi 495 punktów, co daje Polsce 25. miejsce wśród wszystkich krajów biorących udział w badaniu. Poprawa wyników między rokiem 2003 a 2006 nastąpiła w zadaniach wymagających użycia znanego uczniom algorytmu. To, że poprawa nastąpiła w tego typu zadaniach, może świadczyć o pogłębiającej się rutynizacji nauczania matematyki w gimnazjach. Badanie PISA 2006⁴ potwierdza, że mocną stroną polskich gimnazjalistów jest: stosowanie znanych algorytmów; umiejętność odczytywania danych z wykresów, diagramów i tabel; wyobrażenia geometryczna. Polscy gimnazjaliści mają natomiast problem, większy niż uczniowie OECD, gdy muszą wyjść poza znane sobie, rutynowe sposoby postępowania. Większą trudność niż innym uczniom OECD sprawia im:

- samodzielne opanowanie nieznanego wcześniej modelu lub kontekstu;
- zaprojektowanie strategii postępowania – odpowiedniego ciągu działań prowadzącego do rozwiązania, składającego się z dobrze znanych operacji;
- poprowadzenie rozumowania polegającego na analizie działania pewnego systemu i wyciągnięciu z tej analizy wniosków.

Według raportu z 2006 roku, wydaje się niestety, polscy gimnazjaliści coraz bardziej specjalizują się w zadaniach odtwórczych, rutynowych i nadal nie potrafią radzić sobie w sytuacjach wymagających samodzielnego, twórczego myślenia i rozumowania.

Przytoczone wyniki badań oraz ich interpretacja skłaniają do przemyśleń i zmian nie tylko na III, ale już na I etapie edukacyjnym. Jak bowiem wynika z ogólnopolskich badań podstawowych umiejętności językowych i matematycznych uczniów klas trzecich szkoły podstawowej, przeprowadzonych w 2006 roku, a następnie powtórzonych i uzupełnionych w 2008 roku⁵, niektóre z podejmowanych przez nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej działań mogą stać się źródłem mechanizmów szkolnej edukacji, przyczyniających się do trudności matematycznych uczniów klas starszych⁶.

Jedną z najważniejszych umiejętności zdobywanych przez ucznia w trakcie kształcenia ogólnego w szkole podstawowej stanowi myślenie matematyczne rozumiane jako umiejętność korzystania z podstawowych narzędzi matematyki w życiu codziennym

³ Wyniki badań PISA 2009 – pozytywny obraz polskiej edukacji na tle najbardziej rozwiniętych krajów UE, <http://www.men.gov.pl> (dostęp: 13.05.2011).

⁴ Wyniki Badania 2006 w Polsce. Program Międzynarodowej Oceny Umiejętności Uczniów, OECD PISA, Ministerstwo Edukacji Narodowej, s. 42, http://www.badania.edu.pl/Raporty/Raport_2006 (dnia dostęp: 13.05.2011).

⁵ <http://trzecioklasista.cke-efs.pl> (dostęp: 13.05.2011).

⁶ A. Kalinowska: *Pozwólmy dzieciom działać – mity i fakty o rozwijaniu myślenia matematycznego*. Warszawa, Centralna Komisja Egzaminacyjna, 2010.

oraz prowadzenia elementarnych rozumowań matematycznych. Oprócz myślenia matematycznego wymienione i określone zostały takie umiejętności, jak czytanie, myślenie naukowe, umiejętność komunikowania się w języku ojczystym i w języku obcym, umiejętność posługiwania się nowoczesnymi technologiami informacyjno-komunikacyjnymi, umiejętność uczenia się oraz umiejętność pracy zespołowej.

Do zadań szkoły (cele kształcenia – wymagania ogólne), określonych w podstawie programowej dla I etapu edukacyjnego, należy m.in. wyposażenie dziecka w umiejętność czytania i pisanie, w wiadomości i sprawności matematyczne potrzebne w sytuacjach życiowych i szkolnych oraz przy rozwiązywaniu problemów⁷.

Matematyczne myślenie jest dynamicznym procesem, który rozszerza nasze rozumienie, gdyż pozwala radzić sobie z coraz bardziej złożonymi ideami. Do osiągnięcia tego celu wykorzystujemy konkretyzację, uogólnianie, wysuwanie hipotez i uzasadnianie. Przebiega ono w fazach – rozpoznanie, atak, przegląd. Jest związane z siedmioma stanami emocjonalnymi – zainteresowaniem, zaangażowaniem, medytacją, kontynuowaniem, olśnieniem, sceptycznym nastawieniem i kontemplacją. Szczególne znaczenie ma faza rozpoznania, ponieważ stwarza podstawy do ataku, a także przeglądu – ponieważ jest najmniej znaną fazą i ma największe znaczenie edukacyjne. Do usprawnienia matematycznego myślenia prowadzi praktyka połączona z refleksją. Matematycznemu myśleniu sprzyja atmosfera swobodnego stawiania pytań, rzucania wyzwań, refleksji, gdy jest na to dość czasu i miejsca. Matematyczne myślenie prowokuje wyzwanie, niespodzianka, sprzeczność, dostrzeżona luka w rozumieniu. Pomaga w zrozumieniu siebie i świata, w rozszerzaniu naszych wyborów. Jest ono pewnym sposobem postępowania, który ma wiele zastosowań, nie tylko w rozwiązywaniu problemów matematycznych i naukowych, ale również w bardzo ogólnym kontekście. Matematyczne myślenie prowadzi nie tylko do głębszego rozumienia siebie, ale również do spójniejszego ujęcia swojej wiedzy, skuteczniejszego badania tego, co chce się wiedzieć, oraz bardziej krytycznego oceniania tego, co się widzi i słyszy⁸.

Wiedza nabyta przez uczniów w procesie edukacyjnym nie daje się w sposób oczywisty zdefiniować ze względu na jej wielopoziomową użyteczność. W zakres tego pojęcia A. Kalinowska włącza wykorzystanie wiedzy w praktyce, rozumiane jako rozwiązywanie zadań związanych z czynnościami codziennymi, ale również jako radzenie sobie w konkretnej czynności życiowej dziecka (zakupy w sklepie). Innym poziomem jest wykorzystanie wiedzy dla konstruowania nowych pojęć matematycznych (progressywnego postępu) i w końcu dla tworzenia procedur umysłowych wspomagających zrozumienie i rozwijanie kompetencji w zakresie pokrewnych dziedzin naukowych i nie tylko. Rozwój matematycznego myślenia jako wynik stymulacji poznawczej ucznia jest rozumiany przez autorkę bardzo szeroko⁹.

Podejmowane przez nauczyciela edukacji wczesnoszkolnej działania, często nieświadomego ich skutków, są źródłem mechanizmów, zarówno pozytywnych, jak i negatywnych, determinujących rozwój myślenia matematycznego najmłodszych

⁷ Por. Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 23.12.2008 r., Dz.U. z 2009 r. Nr 4, poz. 17, zał. nr 2, s. 206, 210.

⁸ J. Mason, L. Burton, K. Stacey: *Matematyczne myślenie*. Warszawa, WSiP, 2005, s. 8, 151, 154–155.

⁹ A. Kalinowska: *Matematyczne zadania problemowe w klasach początkowych – między wiedzą osobistą a jej formalizacją*. Kraków, Oficyna Wydawnicza „Impuls”, 2010, s. 156.

uczniów. Analizy wybranych stereotypów zachowań nauczycielskich oraz powszechnych przekonań dotyczących wczesnej edukacji matematycznej podjęli się Alina Kalinowska oraz Mirosław Dąbrowski¹⁰. Autorzy ukazują niektóre mechanizmy szkolnej edukacji, które przyczyniają się do trudności matematycznych uczniów w starszych klasach. Zwracają uwagę przede wszystkim na te, które „wyrastają” z ideologii nauczycielskich. Polemizują z niektórymi, powszechnymi wśród nauczycieli, przekonaniami edukacyjnymi w zakresie nauczania matematyki na poziomie wczesnej edukacji, a jednocześnie podają wskazówki pomocne nauczycielom w zmianie własnej praktyki edukacyjnej. Promują samodzielną aktywność poznawczą uczniów w klasach I–III szkoły podstawowej, konieczność odwoływania się do ich wiedzy osobistej oraz wspieranie w podejmowanych przez nich próbach konstruowania wiedzy matematycznej, również za pomocą najlepiej im dostępnego języka potocznego.

Analiza wyników badań własnych

Celem sondażu diagnostycznego, przeprowadzonego w 2011 r. wśród kandydatów na nauczycieli, było zebranie opinii na temat niektórych stereotypowych zachowań nauczycielskich i powszechnych przekonań dotyczących wczesnej edukacji matematycznej. Na pytania kwestionariusza ankiety udzieliło odpowiedzi 159 respondentów. Tylko 35,8% badanych osób to nauczyciele podnoszący kwalifikacje zawodowe, pozostałe osoby nie pracują zawodowo jako nauczyciele (64,2%). Czynni zawodowo nauczyciele pracują w przedszkolu (82,5%) albo w szkole (17,5%). Nauczyciele pracujący w szkole charakteryzują się stażem do 5 lat, podobnie jak ci, którzy pracują w przedszkolu (oprócz 6 osób, tj. 2 osób, które znalazły się w przedziale 6–10 lat, 2 osób pracujących 20 lat i 2 osób pracujących 22 lata). W kwestionariuszu ankiety znalazły się wybrane, powszechne wśród nauczycieli, przekonania edukacyjne odnoszące się do nauczania matematyki na poziomie wczesnej edukacji, zaczerpnięte z ogólnopolskich badań podstawowych umiejętności językowych i matematycznych trzecioklasistów¹¹.

Badani respondenci mają podzielone zdanie co do stwierdzenia: „Uczniowie w klasach początkowych nie mogą sami odkrywać pojęć matematycznych” (zob. tabela 1, pyt. 1). Większą grupę stanowią ci, którzy nie zgadzają się z tym zdaniem (66% badanych). Jednak 34% badanych studentów wierzy w ten mit, który wywodzi się z powszechnego przekonania, że „młodszy uczniowie nie dysponują jeszcze możliwościami do samodzielnego odkrywania znaczeń matematycznych. Zdaniem wielu nauczycieli najpierw trzeba pokazać dzieciom, jak można postępować, tworząc w ten sposób »bazę« pojęć matematycznych niezbędnych do rozwiązywania zadań”¹². Zbyt często dochodzi

¹⁰ A. Kalinowska: *Pozwólmy dzieciom działać...*; M. Dąbrowski: *Stereotypy matematyczne*. <http://trzecioklasista.cke-efs.pl/artykuly/stereotypy-matematyczne> (dostęp: 16.05.2011).

¹¹ <http://trzecioklasista.cke-efs.pl> (dostęp: 13.05.2011).

¹² A. Kalinowska: *Pozwólmy dzieciom działać...*, s. 13.

Tabela 1. Liczbowy oraz procentowy rozkład opinii kandydatów na nauczycieli i nauczycieli podnoszących kwalifikacje zawodowe

Lp.	Opinie kandydatów na nauczycieli i nauczycieli podnoszących kwalifikacje zawodowe dotyczące edukacji matematycznej	Zdecydowanie tak, raczej tak		Raczej nie, zdecydowanie nie	
		Liczba badanych	%	Liczba badanych	%
1.	Uczniowie w klasach początkowych nie mogą sami odkrywać pojęć matematycznych.	54	34	105	66
2.	Przerobienie gotowych kart pracy gwarantuje przyrost wiedzy matematycznej najmłodszych uczniów.	60	37	99	63
3.	Liczenie na konkretnych to nie jest prawdziwa matematyka.	14	9	145	91
4.	Uczniowie słabo sobie radzą z rozwiązywaniem zadań tekstowych, bo nie potrafią czytać ze zrozumieniem.	134	84	25	16
5.	Jeśli chcemy, aby uczniowie opanowali umiejętność rozwiązywania zadań tekstowych, musimy przerobić z nimi dużą liczbę typowych zadań.	130	82	29	18
6.	Przed rozwiązaniem zadania tekstowego dzieci muszą poznać metodę jego rozwiązania.	128	80	31	20
7.	Podstawową pomocą przy rozwiązywaniu zadania tekstowego jest staranne wypisanie danych i szukanych.	154	97	5	3
8.	Należy dążyć do tego, żeby uczeń jak najwcześniej zaczął rozwiązywać zadania tekstowe, zapisując i wykonując odpowiednie obliczenie.	125	78	34	22
9.	Na lekcjach nie ma czasu na zajmowanie się problemami matematycznymi.	47	29	112	71
10.	Matematyka nie nadaje się do pracy w małych zespołach.	15	9	144	91
11.	Najlepiej, gdy dziecko ucząc się matematyki, przede wszystkim uważnie słucha nauczyciela i powtarza jego czynności.	89	56	70	44
12.	Grafy i drzewka pomagają dzieciom w lepszym rozumieniu matematyki.	154	96	5	4
13.	Kalkulator to narzędzie, które „zabija” umiejętność wykonywania obliczeń w pamięci.	128	81	31	19
14.	Uczeń zdolny rozwija w szkole myślenie matematyczne.	131	82	28	18
15.	Uczeń umie tylko to, co było przerabiane w szkole.	55	34	104	66
16.	Zadania „na szóstkę” nie są dla słabych uczniów.	55	34	104	66
17.	Uczniowie edukacji wczesnoszkolnej nie są w stanie tworzyć własnych sprytnych metod wykonywania obliczeń.	38	24	121	76
18.	Uczeń powinien wiedzieć, kiedy się odzywać na zajęciach.	140	88	19	12
19.	Uczniowie w klasach początkowych nie umieją jeszcze argumentować.	67	42	92	58
20.	Uczniowie klas I–III mają już na tyle rozwiniętą wyobraźnię, że mogą zajmować się bryłami.	66	41	93	59

Źródło: Badania własne

do sytuacji, w której uczeń może jedynie odtworzyć podaną wcześniej drogę postępowania. Taka odtwórcza wiedza może jednak zapewnić uczniowi sukces w przypadku kolejnego zadania, do którego potrafi dopasować schemat. Tymczasem celem nauczycielskich dążeń powinno być umożliwienie uczniowi odkrycia drogi, gdyż tylko wiedza samodzielnie konstruowana przez niego umożliwia mu rozumienie relacji matematycznych. Podejmowanie przez dziecko samodzielnych prób badawczych, nawet wówczas, gdy nie dojdzie ono do celu, jest ważniejsze dla rozwoju pojęć matematycznych dziecka niż nie podejmowanie ich w ogóle. Sposób uprawiania matematyki na lekcji determinuje w dużym stopniu kształt wiedzy uczniów oraz sposób jej używania¹³.

„Przerobienie gotowych kart pracy gwarantuje przyrost wiedzy matematycznej najmłodszych uczniów” to, zdaniem A. Kalinowskiej, prawdopodobnie jeden z najbardziej popularnych wśród nauczycieli mitów. Bywa tak, że nauczyciele nie zawsze deklarują takie przekonanie, jednak dają temu wyraz w sposobie realizacji zajęć, np. niechętnie zgadzają się na ominięcie jakiegokolwiek ćwiczenia z pakietu edukacyjnego¹⁴. Badani kandydaci na nauczycieli oraz nauczyciele podnoszący kwalifikacje zawodowe bardziej lub mniej zdecydowanie wyrazili swoje „nie” dla powyższego stwierdzenia (zob. tabela 1, pyt. 2), choć znaleźli się wśród nich i tacy, którzy w ten mit uwierzyli (37%). Realizowanie celów nauczania przez przerabianie kolejnych tematów, wypełnianie wszystkich kart pracy i zeszytów ćwiczeń D. Klus-Stańska odczytuje jako pewne zniewolenie mentalne nauczycieli¹⁵. Wielu z nich nie wyobraża sobie funkcjonowania zawodowego bez szczegółowych konspektów i sterujących postępowaniem ucznia kart pracy. W takiej rzeczywistości szkolnej barierą dla samodzielnego zajmowania się przez uczniów matematyką jest niewielka dostępność propozycji organizowania takich sytuacji edukacyjnych¹⁶.

Rzecz w tym, że nawet najlepszy obrazek jest ze swej natury statyczny. Tymczasem do rozumienia sensu przekształceń i odwracalności – niebywale ważnych w kształtowaniu wiadomości i umiejętności matematycznych – większość małych uczniów potrzebuje doświadczeń przestrzennych dziejących się w czasie¹⁷.

Papierowe nauczanie matematyki wypycha coraz więcej małych uczniów na ścieżkę niepowodzeń szkolnych, zwłaszcza w zakresie nauki matematyki. Dotyczy to także tych dzieci, które rozpoczęły naukę szkolną z wystarczającą dojrzałością szkolną, w tym także w zakresie operacyjnego rozumowania¹⁸.

Kolejnym mitem dotyczącym wczesnej edukacji matematycznej jest stwierdzenie, iż „Liczenie na konkretach to nie jest prawdziwa matematyka” (zob. tabela 1, pyt. 3). Mit ten odkryli prawie wszyscy badani z większą lub mniejszą pewnością (91%). Ważne

¹³ Tamże, s. 13.

¹⁴ Tamże, s. 17.

¹⁵ D. Klus-Stańska: *Mentalne zniewolenie nauczycieli wczesnej edukacji – epizod czy prawidłowość*. „Problemy Wczesnej Edukacji” 2005, nr 1.

¹⁶ A. Kalinowska: *Matematyczne zadania problemowe...*, s. 250.

¹⁷ E. Gruszczyk-Kolczyńska (red.): *Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku szkolnej edukacji*, Warszawa, Wydawnictwo Edukacja Polska, 2009, s. 35.

¹⁸ Tamże, s. 36.

jest to, aby kandydaci na nauczycieli nie tylko byli przekonani o tym, że doświadczenia manipulacyjne są istotne przed rozpoczęciem nauki szkolnej, ale również byli świadomi tego, że takie doświadczenia są niezbędne uczniom w czasie trwania pierwszych lat edukacji matematycznej. Brak lub niedostatek doświadczeń manipulacyjnych może „ograniczać tworzenie się matematycznych pojęć, a w efekcie utrudniać rozwój użytecznej wiedzy matematycznej”¹⁹.

Rozwój intuicyjnych kompetencji matematycznych zaczyna się bardzo wcześnie i spontanicznie wzbogaca rozumienie dziecięcego świata. W przedszkolu, a często jeszcze wcześniej, dziecko może badać relacje na konkretach. Manipulując nimi, zsuwa i rozsuwa przedmioty, zdobywając doświadczenia, które w przyszłości pomogą radzić sobie z określaniem „kto ma więcej” czy „ile to jest razem”, będące już matematycznymi zależnościami. Buduje w ten sposób wiedzę osobistą, konstruując znaczenia na własne potrzeby, związane z poznawczym organizowaniem świata.

Ten proces samodzielnych poszukiwań zostaje znacznie ograniczony, a czasem zupełnie zarzucony po rozpoczęciu nauki w szkole. W przekonaniu wielu nauczycieli uczeń powinien zajmować się poważniejszą matematyką, a więc uporządkowaną według wskazań metodycznych matematyką na poziomie symbolicznym. Na początku może jeszcze korzystać z pomocy liczmanów, ale w ściśle określonym celu. Wyznacza go świadomość nauczyciela, że nie wszystkie dzieci w klasie I osiągnęły poziom myślenia operacyjnego. Nauczyciel pozwala im przez jakiś czas używać palców czy innych elementów do przeliczania, choć w dość ograniczonym zakresie. (...) Po osiągnięciu kompetencji liczenia w pamięci uczeń najczęściej poznaje pojęcia matematyczne drogą przekazu wspieranego przez gotowe ilustracje.

Tymczasem możliwe jest proponowanie dzieciom pewnych doświadczeń sprzyjających rozwojowi poznawczemu dzięki odkrywaniu relacji matematycznych. Poznawanie matematyki, szczególnie na niższych poziomach edukacyjnych, powinno się wiązać z czynnościami na przedmiotach wykonywanymi przez dziecko²⁰.

Manipulowanie konkretami nie służy jedynie do pomocy w obliczaniu działań, ale pozwala na odkrywanie zależności i reguł matematycznych (...). Manipulowanie konkretnymi w celu badania, jak zachowują się liczby, jest niezbędnym warunkiem dalszego rozwoju myślenia matematycznego. Uczniowie słabsi powinni być przedmiotem szczególnej troski nauczyciela w zakresie umożliwiania im samodzielnych poszukiwań oraz odkryć zależności matematycznych na poziomie, który jest im dostępny. Dotyczy to nawet uczniów o znacznie obniżonych możliwościach poznawczych²¹.

Im więcej różnorodnych doświadczeń manipulacyjnych zorganizujemy dzieciom, tym większa jest szansa tworzenia się w ich umysłach pojęć matematycznych tworzących wiedzę elastyczną i użyteczną, szczególnie w sytuacjach poznawczo nowych (...). Uczniowie klas najmłodszych powinni nie tylko mieć możliwość manipulowania konkretnymi, ale co ważniejsze, uczyć się, że jest to niezbędny proces w rozwijaniu myślenia. Istotne jest budowanie pewności dziecka, że strategie tego typu należą do naturalnych procedur postępowania każdego człowieka i są niezbędne dla prawidłowego kształtowania się wiedzy matematycznej²².

¹⁹ A. Kalinowska: *Pozwólmy dzieciom działać...*, s. 27.

²⁰ Tamże: *Matematyczne zadania problemowe...*, s. 251.

²¹ Tamże, s. 253.

²² Tamże: *Pozwólmy dzieciom działać...*, s. 21.

Działania na rzeczywistych przedmiotach nie powinny być traktowane przez nauczyciela jako „ostatnia deska ratunku” dla bardzo słabego ucznia, wobec którego zawiodły wszelkie próby tłumaczenia. Nauczycielska akceptacja potrzeby działania na konkretnych przedmiotach powinna stanowić świadomą strategię proponowaną młodszym uczniom szczególnie w sytuacji nowej poznawczo. Negowanie potrzeb dziecka w tym zakresie może jedynie wydłużyć proces rozwijania myślenia matematycznego, a nawet go zahamować²³.

Zdecydowana większość respondentów (84%) zgadza się ze stwierdzeniem, iż „Uczniowie słabo sobie radzą z rozwiązywaniem zadań tekstowych, bo nie potrafią czytać ze zrozumieniem” (zob. tabela 1, pyt. 4). Jak zauważa A. Kalinowska²⁴, trudno temu twierdzeniu odmówić słuszności. Umiejętność czytania ze zrozumieniem, jako czynność wspomagająca, jest ważna w zorientowaniu się przez dziecko w treści zadania²⁵. Wyniki badań trzecioklasistów pokazują, że umiejętność czytania ze zrozumieniem nie jest warunkiem wystarczającym do prawidłowego rozwiązania zadania. Czytanie zadania matematycznego jest bowiem dużo bardziej skomplikowaną aktywnością intelektualną niż tylko dekodowanie słów. Większość trudności uczniów z rozwiązywaniem zadań tekstowych ma złożony charakter, a ich źródłem są najczęściej inne czynniki niż niska umiejętność czytania ze zrozumieniem tekstów pisanych. Czytanie treści zadania nie może zatem być traktowane jako tożsame z czytaniem innych tekstów. Kompetencja ta zawiera w sobie bowiem konieczność matematyzowania historii opisanej treścią zadania, czyli przełożenia jej na język operacji matematycznych²⁶.

Mit wyrażony w stwierdzeniu: „Jeśli chcemy, aby uczniowie opanowali umiejętność rozwiązywania zadań tekstowych, musimy przerobić z nimi dużą liczbę typowych zadań”, przełożyć możemy na prostą zależność: „jeśli coś ćwiczymy, to umiemy lepiej”. W przeprowadzonych badaniach stwierdzenie to akceptowało 82% kandydatów na nauczycieli i nauczycieli podnoszących kwalifikacje (zob. tabela 1, pyt. 5). Akceptacja tego przekonania byłaby prosta, gdyby nie wątpliwości związane z jego negatywnymi dla myślenia uczniów aspektami. Rozwiązywanie serii typowych, podobnych zadań, wbrew obiegowym opiniom, nie pomaga opanować umiejętności rozwiązywania zadań, wręcz uniemożliwia jej zdobycie. Jedynym efektem żmudnego powtarzania tych samych czynności podczas rozwiązywania serii podobnych zadań jest co najwyżej bezmyślne zapamiętanie sekwencji wykonywanych działań. W efekcie takiego podejścia umiejętność rozwiązywania zadań „rozpadnie się” w świadomości ucznia na dwie umiejętności składowe, tj. rozpoznanie typu zadania; przywołanie z pamięci właściwej procedury postępowania. Takie podejście do rozwiązywania zadań tekstowych ma pewne praktyczne zalety – daje szansę, że znaczna część dzieci poradzi sobie z zadaniami „utrwalonych” typów na testach kompetencji trzecioklasisty albo na początku swojej edukacji w klasach starszych. Podejście to ma jednak przede wszystkim wady. Po pierwsze, wypacza i degeneruje sens umiejętności rozwiązywania zadań tekstowych

²³ Tamże, s. 23, 28.

²⁴ Tamże, s. 29.

²⁵ E. Gruszyk-Kolczyńska: *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki*. Warszawa, WSiP, 1992, s. 136.

²⁶ A. Kalinowska: *Pozwólmy dzieciom działać...*, s. 32–33.

– bez wątpienia najważniejszego celu edukacji matematycznej w szkole podstawowej, a po drugie, wzmacnia i utrwała jako podstawową czy nawet jedyną strategię intelektualną – strategię przypominania²⁷.

Intelektualna korzyść uczniów rozwiązujących wiele zadań typowych sprowadza się w efekcie do ćwiczeń obliczeniowych. Uczniowie nie kształcą myślenia matematycznego, ale przede wszystkim umiejętności rachunkowe. Inaczej mówiąc: rozpoczynanie zapoznawania uczniów z różnymi zadaniami matematycznymi od tłumaczenia i wyjaśniania, „jak to się robi”, eliminuje ich potrzebę dostrzegania analogii między relacjami matematycznymi. Uruchamiany zostaje w ten sposób przede wszystkim mechanizm zapamiętywania algorytmu oraz budowania strategii rozpoznawania „na co jest zadanie”. W ten sposób uczniowie zapewniają sobie pewien zakres bezpieczeństwa funkcjonowania na lekcjach matematyki, często utożsamiając umiejętność identyfikacji algorytmu z myśleniem matematycznym. Jednocześnie rozwiązywanie przez uczniów wielu typowych zadań generuje strategie, które mogą stać się w przyszłości przyczyną niepowodzeń w klasach starszych. Dodatkowym niebezpieczeństwem stosowania takiej strategii może okazać się bezradność wobec zadania poznawczo nowego, ponieważ nie da się w nim zidentyfikować operacji do wykonania, a przede wszystkim nie da się jej wskazać po pobieżnym czytaniu. Uczeń, dla którego ten sposób okazywał się do tej pory wystarczająco skuteczny, doświadcza niepokoju o własne kompetencje, a w rezultacie niechętnie próbuje swoich sił z innymi (nietypowymi) zadaniami, uważając je za zbyt trudne. Tymczasem jednym z najważniejszych aspektów myślenia matematycznego jest szukanie i dostrzeganie analogii. Jest to możliwe wtedy, gdy uczeń ma sposobność samodzielnego tworzenia modeli relacji matematycznych w zadaniach tekstowych. Dopiero wtedy w zetknięciu z zadaniem, którego schemat rozwiązania jest nierozpoznawalny, będzie w stanie go rozwiązać²⁸.

Stwierdzenie: „Przed rozwiązaniem zadania tekstowego dzieci muszą poznać metodę jego rozwiązania” (zob. tabela 1, pyt. 6) to kolejny stereotyp, podobny do poprzedniego, swoją akceptację dla niego wyraził podobny odsetek badanych (80%). Mirosław Dąbrowski zwraca uwagę na to, że uczniowie wcale nie muszą poznać metody rozwiązania zadania, zanim przystąpią do jego rozwiązania. W przeciwnym razie, podając gotową metodę postępowania, ćwiczymy jedynie pamięć, a matematykę pokazujemy w „krzywym” zwierciadle. Zamiast rzeczywistej umiejętności, w ostatecznym rozrachunku udziałem dziecka staje się kilka schematów, znudzenie i zniechęcenie, brak wiary we własne siły i intelektualna bezradność. Czasami także garść „obronnych strategii”, których celem jest ukrycie owej bezradności. Tak naprawdę najbardziej kształcącym jest szukanie rozwiązania zadania samodzielnie albo we współpracy z innymi: badanie związku pomiędzy informacjami zawartymi w zadaniu, wybieranie tych, które są istotne z punktu widzenia postawionego w zadaniu pytania, weryfikowanie kolejnych pomysłów rozwiązania zadania, wysnuwanie wniosków z nieudanych prób itp.²⁹

Prawdopodobnie efektem książek G. Polyi (*Jak to rozwiązać?* i *Odkrycie matematyczne*) jest istniejący od lat w naszej szkole zwyczaj wypisywania danych i szukanych

²⁷ M. Dąbrowski: *Stereotypy matematyczne...*

²⁸ A. Kalinowska: *Pozwólmy dzieciom działać...*, s. 34–40.

²⁹ M. Dąbrowski, *Stereotypy matematyczne...*

w procesie rozwiązywania zadania tekstowego. Ta heurystyczna wskazówka stała się obowiązkowym etapem procedury i zdomowała się już nawet na I etapie kształcenia³⁰. Za podstawową pomoc w rozwiązywaniu zadania tekstowego uznało ją aż 97% badanych studentów zintegrowanej edukacji wczesnoszkolnej i wychowania przedszkolnego (zob. tabela 1, pyt. 7).

Zdaniem M. Dąbrowskiego wypisanie danych i szukanych ma tylko jedną zaletę, tj. zwraca uwagę na informacje podane w zadaniu i sformułowane w nim pytanie. Następnie autor dodaje kilka wad, jego zdaniem ogromnie istotnych, zwłaszcza z punktu widzenia dzieci mniej formalnie myślących. Wypisanie danych i szukanych:

- buduje tamę pomiędzy treścią zadania a tworzoną rozwiązaniem, zachęcając czy wręcz zmuszając uczniów do manipulowania, często przypadkowego, wypisanymi danymi;
- pcha dziecko w stronę rozwiązania symbolicznego, opartego na operacjach arytmetycznych, ograniczając czy wręcz zmniejszając do zera szanse na inny sposób rozwiązania zadania, np. rysunkowy;
- w efekcie zachęca tych uczniów, którzy nie są jeszcze gotowi w ten sposób radzić sobie ze złożonym zadaniem, do tworzenia różnych „strategii obronnych”.

Swój wywód autor kończy wskazówką: „Jeśli chcemy zwrócić uwagę dzieci na dane podane w zadaniu, zachęćmy je do kilkakrotnego przeczytania zadania, do podkreślenia w nim ołówkiem ważnych informacji, sformułujmy serię pytań dotyczących sytuacji opisanej w zadaniu, poprośmy dzieci, aby »po swojemu« opowiedziały o tym, o co w nim chodzi, ale nie wypychajmy ich w kolejny, bardzo wąski i ograniczający, schemat”³¹.

Stereotypowi „Należy dążyć do tego, żeby uczeń jak najwcześniej zaczął rozwiązywać zadania tekstowe, zapisując i wykonując odpowiednie obliczenia” poparcia udzieliło aż 78% badanych (zob. tabela 1, pyt. 8). Tymczasem najtrudniejszą metodą rozwiązania zadania tekstowego jest jego rozwiązanie symboliczne, które wymaga od ucznia największej dojrzałości i najbardziej zaawansowanej wiedzy. Dlatego też najlepszą metodą budowania rozumienia symboliki jest pokazywanie rozwiązania symbolicznego równoległe z rozwiązaniami enaktywnymi i ikonicznymi, wówczas te prostsze wyjaśniają te trudniejsze, nadają sens symbolom i operacjom arytmetycznym. Rozwiązania „przez działanie” (enaktywne) oraz „przez rysunek” (ikoniczne) wynikają w naturalny sposób z treści zadania oraz doświadczeń dziecka. Natomiast rozwiązanie „przez obliczenie” (symboliczne) wymaga umiejętności dokonania matematyzacji sytuacji opisanej w zadaniu, czyli wymaga zastąpienia czynności czy stanu opisanego w zadaniu odpowiednim działaniem czy serią działań. Matematyzowanie to jedna z najważniejszych, ale i najtrudniejszych umiejętności matematycznych rozwijanych w procesie kształcenia. Stopniowo ją doskonaląc, musimy dbać o to, żeby dziecko rozumiało, co robi i dlaczego robi, bo w innym przypadku uczeń będzie używał symboli, zupełnie nie rozumiejąc ich sensu, a jego matematyczny rozwój na dłuższy czas zostanie skutecznie zatrzymany³².

Zdanie respondentów jest podzielone, jeżeli chodzi o stwierdzenie, iż „Najlepiej, gdy

³⁰ Tamże.

³¹ Tamże.

³² Tamże.

dziecko ucząc się matematyki, przede wszystkim uważnie słucha nauczyciela i powtarza jego czynności” (zob. tabela 1: 56% – za, 44% – przeciw; pyt. 11). Uważne słuchanie nauczyciela i powtarzanie jego czynności nie prowadzi ucznia w kierunku intelektualnej aktywności, własnych poszukiwań matematycznych na miarę jego możliwości, ale wręcz odwrotnie – prowadzi ucznia w kierunku intelektualnego uzależnienia się od nauczyciela oraz gotowych schematów postępowania. Uczniowie będą się specjalizować jedynie w zadaniach odtwórczych, rutynowych, a gdy przyjdzie im zmierzyć się z sytuacjami wymagającymi samodzielnego, twórczego myślenia, będą bezradni.

Dzieci w szkole za pomocą specjalnych zabiegów pedagogicznych są „oduczane” zadawania pytań, co w efekcie stanowi jedną z przyczyn generowania bierności poznawczej uczniów. Dzieci pozbawiane możliwości wyjaśniania własnego sposobu postępowania i uzasadniania go, nie mają możliwości rozwijania myślenia matematycznego. Próby nawiązywania interakcyjnego procesu przez ucznia zbywane są przez nauczycieli w taki sposób, żeby miał on świadomość niestosowności takiego zachowania. Tymczasem swobodne wypowiedzianie się uczniów rozwija język matematyczny³³. Niepokoi zatem wybór przyszłych nauczycieli co do stwierdzenia „Uczeń powinien wiedzieć, kiedy odzywać się na zajęciach” (zob. tabela 1, pyt. 18). Aż 88% przychyli się do zacytowanego stwierdzenia, wyrażając tym samym przekonanie, iż uczeń nie może odzywać się niepytany.

Kolejnym stwierdzeniem, co do którego wypowiadały się badane osoby, było zdanie: „Na lekcjach nie ma czasu na zajmowanie się problemami matematycznymi”. Stwierdzenie to akceptuje 29% badanych. Natomiast 71% z nich odrzuca je, wyrażając tym samym wiarę w to, że w czasie zajęć zintegrowanych powinien znaleźć się czas na rozwiązywanie zadań nietypowych (por. tabela 1, pyt. 9). A. Kalinowska³⁴ wyjaśnia, iż istnieją co najmniej dwie przyczyny tego, iż wielu nauczycieli akceptuje powyższe stwierdzenie. Z jednej strony wynika to z mitycznego przekonania o konieczności zapewnienia wszystkich bez wyjątku kart pracy ucznia. Z drugiej strony jest konsekwencją mitycznej opinii, iż zajmowanie się problemami matematycznymi możliwe jest dopiero po zrealizowaniu określonej partii materiału, gdy uczniowie poznali już dane pojęcia matematyczne i dopiero wtedy mogą je twórczo wykorzystywać. Tymczasem zadania nietypowe odgrywają niezastąpioną rolę w rozwoju dziecięcego myślenia matematycznego i nie mogą być tylko dodatkiem występującym w formie zagadki czy ciekawostki. Problemy matematyczne powinny stanowić częsty materiał służący do podejmowania przez każdego ucznia samodzielnych prób ich rozwiązywania. Tak, by uczeń miał okazję doświadczenia tego, że wiedzę matematyczną może budować samodzielnie, stając się tym samym niezależnym intelektualnie od nauczyciela.

Stwierdzenie „Zadania »na szóstkę« nie są dla słabych uczniów” jest mitem, który mocno osadził się w przekonaniach nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej. Problemowe zadania nie są przez nich postrzegane jako niezbędny stymulator rozwojowy słabszych intelektualnie uczniów. Niektórzy spośród przyszłych nauczycieli (por. tabela 1, pyt. 16) również w ten mit uwierzyli (35%). Tymczasem rozwiązywanie zadań wymagających tworzenia własnych procedur, odpowiadających indywidualnemu poziomowi

³³ A. Kalinowska: *Pozwólmy dzieciom działać...*, s. 99, 101, 106.

³⁴ Tamże, s. 41–47.

rozumienia, wspomaga rozwój matematycznego myślenia wszystkich uczniów, choć przyrost kompetencji nie jest u wszystkich jednakowy. Jak postuluje A. Kalinowska, zadania „na szóstkę” o zróżnicowanym poziomie trudności stanowić powinny matematyczną propozycję edukacyjną dla wszystkich uczniów³⁵.

Stwierdzenie, iż „Uczeń zdolny rozwija w szkole myślenie matematyczne”, akceptuje aż 82% badanych studentów (por. tabela 1, pyt. 14), podczas gdy rzeczywistość szkolna przedstawia się nieco inaczej. Praktyka szkolna dostarcza wielu przykładów zdolnych uczniów, którzy w ciągu trzech lat nauki nie zostali nawet zidentyfikowani przez swoich nauczycieli, co wynika m.in. z faktu, iż nauczyciele edukacji wczesnoszkolnej nie dysponują narzędziem służącym do testowego zdiagnozowania uczniów zdolnych matematycznie. Uczeń zdolny, tak jak każdy uczeń, potrzebuje stymulacji intelektualnej dostosowanej do jego poziomu myślenia matematycznego. Nie może marnować czasu ani na rozwiązywanie zadań, które nie są dla niego wyzwaniem intelektualnym, ani na wyjaśnianie innym zagadnień, które już zna. Jego rolą jest zmaganie się z zadaniami trudniejszymi, ponieważ jedynie takie pozwolą na rozwijanie jego kompetencji matematycznych. Dla kształtowania kompetencji matematycznych uczniów zdolnych lepiej jest, gdy zajmują się problemem pozwalającym zauważyć nowe zależności matematyczne, nawet nie w pełni zdefiniowane przez nauczyciela, niż gdy zajmują się wieloma mało skomplikowanymi zadaniami w celach utrwalających³⁶.

Z ogólnopolskich badań wynika, iż nauczyciele wczesnej edukacji wykazują się brakiem zaufania do myślenia najmłodszych uczniów. Ma to swoje odbicie w nieobecności na zajęciach z edukacji matematycznej sytuacji sprzyjających umożliwianiu tworzenia przez uczniów osobistych strategii liczenia. Tymczasem dokonywanie przez uczniów obliczeń za pomocą osobistych strategii korzystnie wpływa na rozwój ich myślenia. Pozwala na konstruowanie nowych sposobów liczenia, generując wiedzę matematyczną. Uczniowie klas najmłodszych są w stanie tworzyć własne sposoby obliczania pod warunkiem, że mają do tego okazję na lekcjach matematyki³⁷. Cieszy więc fakt, iż tylko 24% kandydatów na nauczycieli opowiada się za stwierdzeniem, że „Uczniowie edukacji wczesnoszkolnej nie są w stanie tworzyć własnych sprytnych metod wykonywania obliczeń” (por. tabela 1, pyt. 17).

Okazuje się, że nie tylko nauczyciele, ale również wielu kandydatów na nauczycieli (42%) akceptuje mit wyrażający się w stwierdzeniu, iż „Uczniowie w klasach początkowych nie umieją jeszcze argumentować” (por. tabela 1, pyt. 19). Jak zauważa A. Kalinowska³⁸, ma to swoje źródło w tym, iż nauczyciele rzadko wykorzystują twórczą aktywność małych dzieci w kontekście rozwijania myślenia matematycznego uczniów. Infantyilizowanie możliwości najmłodszych uczniów w zakresie matematycznego myślenia koncepcyjnego stanowi jedną z przyczyn braku na lekcjach zadań wyzwalających myślenie twórcze oraz inspirujących uczniów do uzasadniania własnego stanowiska. Umiejętność uzasadniania, argumentowania jest kompetencją istotną w przypadku rozumienia pojęć matematycznych. Wyjaśnianie sposobu postępowania

³⁵ Tamże, s. 83–84, 89–90.

³⁶ Tamże, s. 69.

³⁷ A. Kalinowska: *Pozwólmy dzieciom działać...*, s. 92–93, 98.

³⁸ Tamże, s. 110–111, 117–118.

przez ucznia wspomaga budowanie języka matematycznego. Swobodna ekspresja słowna ma ogromne znaczenie dla rozwoju myślenia matematycznego ucznia. E. Swoboda również podkreśla, iż

istotną częścią pracy wspierającej myślenie matematyczne u dzieci przedszkolnych i na poziomie wczesnoszkolnym są takie zajęcia, które dawałyby szansę na gromadzenie doświadczeń w zakresie: 1) umiejętności „wymyślenia” własnych reguł, zasad; 2) umiejętności argumentowania, przekonywania, obrony własnego poglądu³⁹.

Stwierdzenie: „Uczeń umie tylko to, co było przerabiane w szkole”, zostało odrzucone przez 66% respondentów (por. tabela 1, pyt. 15), zaś 34% akceptuje je. Uczniowie edukacji wczesnoszkolnej poznają w szkole nazwy określające pojęcia matematyczne. Zanim to jednak nastąpi, bardzo często, dzięki wielu doświadczeniom pozaszkolnym, dostrzegają wiele zależności matematycznych, i choć nie potrafią ich nazwać, korzystają z nich w różnych sytuacjach. Dlatego też nauczyciel edukacji wczesnoszkolnej nie może koncentrować się tylko na tych umiejętnościach, które są przedmiotem zabiegów dydaktycznych w szkole, ponieważ to zubaża jego wiedzę o uczniu. „Matematyczna przedwiedza ucznia” jest często pomijana i niedostrzegana nie tylko przez nauczycieli, ale również przez samych uczniów, którzy „nauczyli się”, że „wiedzieć” mogą tylko to, co już było na lekcjach⁴⁰.

Aż 91% kandydatów na nauczycieli i nauczycieli podnoszących kwalifikacje odrzuciło stwierdzenie, iż „Matematyka nie nadaje się do pracy w małych zespołach” (por. tabela 1, pyt. 10), wyrażając tym samym możliwość zastosowania tej formy pracy z najmłodszymi uczniami w swojej praktyce zawodowej. Jak wynika z ogólnopolskich badań⁴¹, ta forma pracy, polegająca na pracy w grupach czy choćby w parach, zajmuje marginalną część zajęć z zakresu edukacji matematycznej. Tymczasem praca w małych grupach, szczególnie w klasach edukacji wczesnoszkolnej, jest koniecznym doświadczeniem poznawczym stymulującym rozwój myślenia matematycznego wszystkich uczniów. Obawy nauczycieli wczesniej edukacji związane z taką organizacją pracy na zajęciach matematycznych wynikają m.in. z nieprzyjemnych osobistych wspomnień związanych z tym przedmiotem oraz niepowodzeń w swojej praktyce zawodowej. Najczęstszą przyczyną niepowodzeń w organizowaniu pracy w małych zespołach w ramach edukacji matematycznej jest nieodpowiedni dobór zadania do rozwiązania. Dlatego też kandydatów na nauczycieli, otwartych na stosowanie tej formy organizacji zajęć, dobrze jest zapoznać z zadaniami matematycznymi nadającymi się do rozwiązywania w małych zespołach, aby nie zniechęcili się do stosowania tej formy pracy w trakcie zajęć matematycznych z najmłodszymi uczniami. Przykładami zadań dobrze sprawdzających się we wspólnej pracy uczniów, zdaniem A. Kalinowskiej, są miniprojekty, różnego rodzaju zadania nietypowe, zadania na odkrywanie reguł. Rozwiązywanie tego typu zadań sprawia, iż uczniowie przekonują się o tym, że matematyczne zadania wymagają czasu i podejmowania wielu prób. Praca w małych grupach sprzyja rozwijaniu

³⁹ E. Swoboda: *Kształtowanie podstaw dla myślenia matematycznego*, s. 2 (dostęp: 16.05.2011).

⁴⁰ A. Kalinowska: *Pozwólmy dzieciom działać...*, s. 76–82.

⁴¹ Tamże, s. 48–58.

myślenia krytycznego, które jest niezbędne dla kształtowania rozumowania matematycznego uczniów. Nauczyciel powinien dopuszczać nieudane próby oraz różnice w zakresie wykonanej pracy intelektualnej przez poszczególnych uczniów, stwarzając tym samym bezpieczne warunki dla zmagania uczniowskich z problemem matematycznym.

Refleksja nad odniesionymi sukcesami, nawet jeśli są tylko częściowe, wzmacnia pewność siebie. Nauczyciel koniecznie musi rozumieć, jak istotne jest, by uczniowie czuli taką pewność. Powinien starać się stworzyć warunki, w których każdy uczeń odnosi jakiś sukces. (...) Już w najwcześniejszych latach dzieci mogą nabrać dostatecznej pewności, by zadawać pytania, podejmować wyzwania i dokonywać refleksji, ale należy je do tego zachęcać. Trzeba pielęgnować i karmić ich ciekawość, nadawać strukturę ich zdolnościom poznawczym, podtrzymywać pewność siebie⁴².

Jak wynika z badań sondażowych przeprowadzonych wśród studentów zintegrowanej edukacji wczesnoszkolnej i wychowania przedszkolnego, aż 81% z nich dostrzega w kalkulatorze „wroga, który zabija” umiejętność liczenia w pamięci.

Nie jest prawdą, że kalkulator jest wrogiem liczenia w pamięci, wszystkie badania dotyczące użycia kalkulatorów w procesie kształcenia pokazują coś wręcz odwrotnego. Natomiast jest prawdą, że ekspozycja tylko jednej schematycznej metody postępowania „zabija” pomysłowość dzieci i różnorodność ich poczyniń. W efekcie skłania do używania tej metody zawsze i wszędzie, nawet jeżeli kłóci się to w oczywisty sposób ze zdrowym rozsądkiem⁴³.

Pośród badanych kandydatów na nauczycieli oraz nauczycieli podnoszących kwalifikacje zawodowe aż 96% deklaruje, iż wierzy w to, że „Grafy i drzewka pomagają dzieciom w rozumieniu matematyki”. Tymczasem badania pokazują, że dla dzieci jest to trudny, symboliczny język, którego część z nich uczy się po prostu na pamięć. Okazało się również, że związek grafów z rozumieniem przez dzieci par działań odwrotnych jest zerowy. Podobnie z językiem drzewek, jest on dość skomplikowanym i formalnym językiem symbolicznym, który niczego nie wyjaśnia, a co najwyżej dostarcza innej formy zadań sprawdzających, czy dzieci już zapamiętały podstawowe reguły dotyczące kolejności wykonywania działań⁴⁴. Jednak zdaniem E. Gruszczyk-Kolczyńskiej schematy graficzne pełnią niezwykle ważną funkcję w nauczaniu matematyki. Są one, z punktu widzenia rozwoju dziecięcego myślenia, naturalnym ułatwieniem w przechodzeniu z poziomu reprezentacji enaktywnych, przez poziom reprezentacji ikonicznych, na poziom reprezentacji symbolicznych. Reprezentacje graficzne tracą sens kształcący i stają się zbędnym balastem, a nawet przeszkodą w spontanicznym rozwiązywaniu zadań głównie z powodu popełnianych błędów metodycznych w trakcie ich wprowadzania. Dla sprawnego posługiwania się każdym rodzajem reprezentacji graficznych dziecko musi wcześniej wykonać na wiele sposobów dany typ czynności (poziom enaktywny), aby zrozumieć, co one reprezentują i w jaki sposób można się nimi posługiwać, np. graf strzałka

⁴² J. Mason, L. Burton, K. Stacey: *Matematyczne myślenie...*, s. 149–150.

⁴³ M. Dąbrowski: *Stereotypy matematyczne...*

⁴⁴ Tamże.

wywodzi się z gestu wskazywania, a drzewko obrazuje łączenie, zsypywanie razem⁴⁵.

Zdania respondentów są podzielone co do stwierdzenia, iż „Uczniowie klas I–III mają już na tyle rozwiniętą wyobraźnię, że mogą zajmować się bryłami” (por. tabela 1, pyt. 20, 41% za, 59% przeciwko). Mirosław Dąbrowski zwraca uwagę na to, iż dziecko rozwija swoją wyobraźnię przestrzenną od początku od aktywnego obcowania z otaczającym światem, tylko w szkole zupełnie nie zdajemy sobie z tego sprawy. Poznanie geometrii powinno więc rozpoczynać się od tych obiektów, które są dostępne poznaniu dziecka i których własności może ono, obcując z modelami, samodzielnie obserwować i badać. Otaczają nas na ogół dobre lub bardzo dobre modele brył. Dziecko żyje między nimi i obcuje z nimi każdego dnia, eksperymentuje z nimi i bada je. Równocześnie bardzo trudno jest wyszukać dobre modele np. figur płaskich – kwadrat z kartki papieru tak naprawdę jest modelem prostopadłościanu, tyle że bardzo niskiego⁴⁶.

Konkluzje

Początkowe nauczanie matematyki stanowi podstawę do nauki w kolejnych etapach procesu edukacji. Dlatego też tak ważne jest zapewnienie uczniom edukacji wczesnoszkolnej dobrego startu w uczeniu się matematyki. Rozwój czynności umysłowych ważnych dla uczenia się matematyki powinien być wspomagany przez stosowanie odpowiednich metod kształcenia, form organizacyjnych uczenia się, mediów i materiałów dydaktycznych. Od prawidłowo skonstruowanych pojęć i ukształtowanych umiejętności matematycznych zależy powodzenie uczniów w ich dalszej edukacji matematycznej. O rezultatach procesu kształcenia, zdaniem Z. Krygowskiej⁴⁷, decyduje aktywizowanie wyobraźni matematycznej i myślenia matematycznego ucznia. Zgodnie z konstruktywistycznym podejściem (J.S. Bruner, J.S. Piaget, L.S. Wygotski) dziecko powinno być aktywne i twórcze – to ono buduje swoją matematykę, nauczyciel zaś wspiera jego działania i rozwój.

Jak wynika z przywołanych w artykule międzynarodowych i ogólnopolskich badań edukacyjnych, a także badań własnych, przekonania „drzemiące” w pedagogach, a odnoszące się do edukacji matematycznej mogą stać się jedną z przeszkód utrudniających uczniom odnoszenie sukcesów w uczeniu się matematyki. Powyższe rozważania skłaniają do refleksji nad jakością działań podejmowanych przez nauczycieli w zakresie nauczania matematyki na etapie edukacji wczesnoszkolnej (i nie tylko). Działan, które wynikają niejednokrotnie z zakorzenionych przekonań, niekoniecznie zgodnych z prawdą i niekoniecznie sprzyjających rozwojowi myślenia matematycznego najmłodszych uczniów. Działan, prowadzących uczniów na manowce analfabetyzmu, a nie alfabetyzmu matematycznego. Analfabetyzm matematyczny rozumiany jest tutaj za Dorotą Klus-Stańską i Marzeną Nowicką, „gdy powyżej określonego wieku

⁴⁵ E. Gruszczyk-Kolczyńska: *Dzieci ze specyficznymi trudnościami...*, s. 101–109.

⁴⁶ M. Dąbrowski: *Stereotypy matematyczne...*

⁴⁷ Z. Krygowska: *Zarys dydaktyki matematyki*. Cz. 2. Warszawa, WSiP, 1977.

jednostka, choć potrafi wykonywać działania arytmetyczne, a nawet robić przeliczenia według różnych wzorów, w gruncie rzeczy nie rozumie, na czym polega matematyczny sens tych czynności”⁴⁸. Stąd istotne wydaje się przygotowanie przyszłych nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej do odróżniania faktów i mitów dotyczących rozwijania myślenia matematycznego. A to w tym celu, by ich przyszłe działania były świadome, a jednocześnie uruchamiały pozytywne mechanizmy sprzyjające rozwojowi myślenia matematycznego najmłodszych uczniów, a w dalszej perspektywie przyczyniały się do powodzenia w uczeniu się matematyki uczniów w klasach starszych.

Uczeń edukacji wczesnoszkolnej buduje w swoim umyśle rozumienie tego, na czym polega uczenie się matematyki. Dlatego też doświadczenia w uczeniu się matematyki odgrywają bardzo ważną rolę w tym, jak pojmuje on uczenie się matematyki. Jeżeli uczeń odczytuje, iż wiedza matematyczna musi być przez kogoś dana, uczy się zasady, iż uczenie się matematyki polega na zapamiętaniu tego, co mówi i w jaki sposób postępuje nauczyciel w trakcie wykonywania zadań matematycznych.

W takich warunkach poznawczych jest prawie niemożliwe, aby uczniowie mogli w sposób adekwatny do możliwości intelektualnych rozwijać myślenie matematyczne. Ten proces wymaga bowiem samodzielnego konstruowania rozumienia pojęć matematycznych, szczególnie w początkowym okresie szkolnym. Uczniowie w klasach najmłodszych muszą więc manipulować przedmiotami, samodzielnie zauważać prawidłowości związane ze swoimi działaniami oraz podejmować próby ich wyjaśniania⁴⁹.

W centrum uwagi nauczyciela edukacji wczesnoszkolnej powinno być wspomaganie rozwoju czynności umysłowych istotnych dla uczenia się matematyki. Dlatego też tak ważne jest przygotowanie kandydatów na nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej i wychowania przedszkolnego (i nie tylko) do rozwijania umiejętności matematycznego myślenia, tj. do jego usprawniania, prowokowania, wspierania i podtrzymywania. Sposób nauczania matematyki może bowiem spowodować zablokowanie gotowości i zdolności do myślenia matematycznego, zastępując je potrzebą pamiętania reguł matematycznych⁵⁰.

⁴⁸ D. Klus-Stańska, M. Nowicka: *Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej*. Warszawa, WSiP, 2005, s. 107.

⁴⁹ A. Kalinowska: *Pozwólmy dzieciom działać...*, s. 119.

⁵⁰ J. Mason, L. Burton, K. Stacey: *Matematyczne myślenie...*, s. 143–153; D. Klus-Stańska, M. Nowicka: *Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej...*, s. 105.